LINEARE ALGEBRA

ÜBUNGSBLATT 8

Man betrachtet immer einen Körper K.

1. a) Seien V ein K-Vektorraum mit $n = \dim_K V$ und $S, T \leq_K V$. Man betrachte zwei Basen, $x = (x_1, \dots, x_p)$ in S und $y = (y_1, \dots, y_q)$ in T. Man zeige, dass $S \oplus T = V$ genau dann wenn $n = p + q$ und $x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_p)$ eine Basis für V ist.
b) Man zeige, dass jeder Untervektorraum S eines K-Vektorraäumes V einen direkten Komplement besitzt (d.h. existiert $T \leq V$, so dass $S \oplus T = V$). Hinweis: Man benutzt a) und der Satz von Steinitz!

2. Man benutze die Ersatzungslemma, um zu zeigen dass die Vektoren

$$v_1 = (1, 2, -1, 2), v_2 = (1, 2, 1, 4), v_3 = (2, 3, 0, -1), v_4 = (1, 3, -1, 0)$$

eine Basis von ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^4$ bilden, und um die Koordinaten des Vektors $v = (2, 3, 2, 10)$ bezüglich dieser Basis zu rechnen.

3. Man benutze die Ersatzungslemma, um die reele Zahlen α zu bestimmen, für die die Vektoren $v_1 = (1, -2, 0)$, $v_2 = (2, 1, 1)$ und $v_3 = (0, \alpha, 1)$ eine Basis von ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^3$ bilden.

4. Man benutze die Ersatzungslemma, um zu sagen, ob die folgende Matrizen invertierbar sind, und wenn die Antwort wahr ist, die Inverse zu rechnen:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. (Die Dimensionsformeln) Für zwei Untervektorräume S, T eines K-Vektorräumes V gelten:
   a) $\dim_K S + T = \dim_K S + \dim_K T - \dim_K S \cap T$.
   b) Ist die Summe $S + T$ direkt, so $\dim_K S \oplus T = \dim_K S + \dim_K T$.

6. In ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^4$ betrachte man die Untervektorräume:

$$U = \langle (2, 0, 1, -1), (0, 1, 3, 2), (-1, 0, 1, 1), (1, 1, 5, 2) \rangle$$
$$S = \langle (1, 0, 2, 0), (2, 1, -1, 2), (-1, -1, 3, 2) \rangle.$$

Man bestimme die Dimension und je eine Basis für die Untervektorräume U, S, $U + S$ und $U \cap S$.

"Babeş-Bolyai" Universität, Fakultät für Mathematik und Informatik, RO-400084, Cluj-Napoca, Rumänien
E-mail address, George Ciprian Modoi: cmodoi@math.ubbcluj.ro